VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–июнь, 2001. Том IV, № 1(7)

УДК 519.632.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ В АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ*)

А. В. Гаврилов, Я. Л. Гурьева,
В. П. Ильин, Е. А. Ицкович

Рассматриваются численные методы моделирования полей, формируемых дипольными источниками в аксиально симметричных средах. Исходная трехмерная краевая задача с помощью разложения Фурье сводится к последовательности двумерных задач для гармоник. Описываются методы конечных объемов, аппроксимирующие на прямоугольной сетке исходную задачу с учетом сингулярности решения. Решение системы сеточных алгебраических уравнений проводится с помощью итерационного неявного метода неполной факторизации. Для ускорения сходимости решение осуществляется на последовательности трех вложенных сеток с применением промежуточной интерполяции, коррекции невязки и межсеточной экстраполяции. Эффективность предложенных методов иллюстрируется результатами численных экспериментов на серии методических задач.

1. Введение

В работе рассматриваются численные методы расчета трехмерных электрических полей в неограниченных средах с осевой симметрией. При прохождении через среду электрического тока потенциал u удовлетворяет уравнению

$$Lu \equiv -\nabla(\sigma\nabla u) = 0,$$

где σ — тензор проводимости. Кроме того, он удовлетворяет условиям Дирихле на поверхности электродов, однородным условиям Неймана на границе с непроводящей средой и условию излучения в бесконечности. Таким образом, вычисление потенциала сводится к решению внешней краевой задачи. Часто удобно рассматривать электрод не как часть границы с неоднородным краевым условием 1-го рода, а как «источник»; при этом вместо однородного уравнения получается неоднородное, в правой части которого стоит «плотность тока».

Во многих приложениях проводящая среда может считаться симметричной относительно некоторой оси. Одним из примеров является моделирование полей гальванического каротажа вертикальной скважины в горизонтально-слоистой среде [1]. Электрический (или гальванический) каротаж буровой скважины — метод геофизического исследования, заключающийся в пропускании через среду постоянного электрического тока с одновременным измерением в нескольких точках возникающего электрического потенциала. Из полученных данных делаются выводы о величине удельного сопротивления в среде и соответственно о ее структуре и составе. Фактически для этого требуется решить обратную задачу: по значениям в заданных точках потенциала найти неизвестный тензор проводимости. Известно, что эта задача, строго говоря, некорректна, поэтому при ее решении приходится делать дополнительные предположения. Необходимым этапом является решение прямой задачи для среды с известным сопротивлением.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00579, 99–05–64430, 99–07–90422).

© **2001 Гаврилов А. В., Гурьева Я. Л., Ильин В. П., Ицкович Е. А.**

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое расположенным на оси скважины цилиндрическим зондом из непроводящего материала с двумя или несколькими токовыми электродами на поверхности. Для того чтобы ось вертикальной скважины была осью симметрии краевой задачи, требуется, во-первых, горизонтальность пластов, во-вторых, отсутствие анизотропии либо наличие лишь вертикально-горизонтальной анизотропии и, в-третьих, симметричное проникновение бурового раствора в пласт (которое приводит к изменению проводимости вблизи скважины). Электрическое поле зависит от расположения электродов и не будет, вообще говоря, симметричным.

При наличии аксиальной симметрии среды возможно разделение переменных, после чего задача сводится к вычислению угловых гармоник потенциала $u_k(r, z)$. При этом разные гармоники находятся независимо путем решения соответствующей краевой задачи с уравнением типа Гельмгольца. Как справедливо отмечается в [2], на практике часто достаточно найти лишь первую гармонику, поскольку старшие гармоники резко убывают с увеличением расстояния от источника.

Формулировки и некоторые особенности краевых задач для угловых гармоник рассмотрены в п. 2. В п. 3 описаны конечно-разностные аппроксимации краевых задач в соответствии с [3, 4] и итерационные алгоритмы решения возникающих линейных систем [5]. В п. 4 изложены результаты численных экспериментов и некоторые выводы.

2. Метод Фурье понижения размерности задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma} = g, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma'} = g', \tag{1}$$

где эллиптический оператор второго порядка L задан в области Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma'$; g, g' — некоторые функции, заданные соответственно на участках Γ и Γ' границы $\partial\Omega$. Как обычно, под $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ понимается производная по направлению нормали к $\partial\Omega$ (в предположении изотропности L).

Будем говорить, что краевая задача (1) обладает аксиальной симметрией относительно некоторой прямой l, если такой симметрией обладают область Ω, поверхности Γ, Γ' и оператор L. Последнее означает, что в цилиндрических координатах с прямой l в качестве оси z этот оператор не будет зависеть от угла φ. Например, если σ — скалярная функция, то в цилиндрических координатах оператор

$$Lu = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma r \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sigma}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$$

симметричен, если σ не зависит от φ.

Представим решение, правую часть и краевые условия задачи (1) в виде рядов Фурье:

$$\begin{gathered} u(r,z,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} u_m(r,z),\ f(r,z,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} f_m(r,z),\ (r,z) \in \widetilde{\Omega}, \\ g(r,z,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} g_m(r,z),\ g'(r,z,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} g'_m(r,z),\ (r,z) \in \widetilde{\Gamma}'. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Gamma}'$ — «проекции» соответствующих (аксиально-симметричных) объектов на полуплоскость $\{(r, z) \mid r > 0\}$.

Если мы подставим теперь эти ряды в уравнение (1) и в краевые условия, то получим для каждой гармоники u_m следующую краевую задачу:

$$L_m u_m = f_m \text{ на } \widetilde{\Omega}, \quad u_m|_{\widetilde{\Gamma}} = g_m, \quad \left.\frac{\partial u_m}{\partial \bar{n}}\right|_{\widetilde{\Gamma}'} = g'_m. \tag{3}$$

Здесь оператор

$$L_m = e^{-im\varphi} L e^{im\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\sigma r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z}\sigma\frac{\partial}{\partial z} + \sigma\frac{m^2}{r^2}$$

не зависит от угла φ и потому может рассматриваться как двумерный.

Тем самым трехмерная краевая задача сводится к семейству двумерных, и соответствующая постановка иногда называется 2,5-мерной [2]. Такой переход законен при довольно широких условиях на Ω, L, f, и мы не будем заниматься его обоснованием, считая эти условия выполненными.

В задаче (3) не хватает краевых условий на той части границы $\widetilde{\Omega}$, которая лежит на прямой $r = 0$. Чтобы получить их, заметим, что формально $u(-r, z, \varphi) = u(r, z, \varphi + \pi)$. Отсюда сразу следуют требуемые условия:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u_m}{\partial n}\right|_{r=0} &= 0 \quad \text{при четных} \quad m, \\ u_m|_{r=0} &= 0 \quad \text{при нечетных} \quad m. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь задачу моделирования поля электрического каротажа. Потенциал u находится из внешней краевой задачи для уравнения (1) с условием излучения в бесконечности ($u(x) \to 0$ при $x \to \infty$), однородными условиями Неймана на поверхности зонда и условиями Дирихле на поверхности электродов (в предположении, что известны потенциалы на них).

Строго говоря, такая задача еще не обладает осевой симметрией, даже если σ симметричен относительно оси зонда, поскольку могут быть несимметричны сами электроды, образующие поверхность Γ. Она, однако, становится симметричной, если заменить условия Дирихле на условия Неймана, что вполне допустимо при малых размерах электродов. При этом в качестве исходных данных используется величина тока, а не потенциал. Возникающая погрешность зависит от размеров и формы электродов; возможные методы ее оценки и, при необходимости, учета здесь не рассматриваются. Такая проблема не возникает при использовании кольцевых электродов: в этом случае осевой симметрией обладают не только задача, но и данные, так что все $u_m = 0$, кроме $m = 0$.

3. Сеточные методы решения краевых задач

В данном разделе рассматриваются аппроксимационные и алгебраические вопросы решения описанных выше краевых задач. Метод конечных объемов применяется для построения пятиточечных сеточных уравнений, коэффициенты которых в окрестности особых точек модифицируются с учетом асимптотического поведения решения (см. [3, 4]). Для экономичного решения получаемых уравнений используется неявный метод неполной факторизации (см. [5]) на последовательности трех вложенных сеток с использованием промежуточных интерполяций, коррекции невязки, межсеточной экстраполяции и быстрого решения вспомогательных систем.

3.1. Балансные разностные схемы с учетом особенностей решения. Для решения краевых задач вида (3) (индекс m для краткости опускаем) расчетная прямоугольная область Ω дискретизируется путем построения неравномерной в общем случае сетки Ω^h с координатными линиями

$$r_{i+1} = r_i + h_i^r,\ i = 0, \dots, N_r; \quad z_{j+1} = z_j + h_j^z,\ j = 0, \dots, N_z,$$

такими, что прямые $r = r_0$, $r = r_{N_r+1}$ и $z = z_0$, $z = z_{N_z+1}$ являются границами области Ω, а границы раздела различных сред проходят по координатным линиям.

Исходные дифференциальные уравнения интегрируются по конечным объемам или сеточным ячейкам Дирихле — Вороного

$$V_{i,j} = \{r_{i-1/2} < r < r_{i+1/2},\, z_{j-1/2} < z < z_{j+1/2}\}$$

в окрестности внутренних узлов сетки $(i,j) \in \Omega^h$, а после аппроксимаций получаемых балансных соотношений

$$I_{i,j} \equiv -\int\limits_{S_{i,j}} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int\limits_{V_{i,j}} \left(f - \frac{m^2}{r^2}\right) u\, dV, \tag{5}$$

где $S_{i,j}$ обозначает границу сеточной ячейки $V_{i,j}$, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производную в направлении ее внешней нормали, приходим к симметричной системе пятиточечных сеточных уравнений

$$\begin{gathered}
-p3_{i-1,j}u_{i-1,j} - p4_{i,j-1}u_{i,j-1} - p3_{i,j}u_{i+1,j} - p4_{i,j}u_{i,j+1} + p0_{i,j}u_{i,j} = f^h_{i,j},\\
p3_{i,j} = \frac{\big(\sigma_{i+1/2,j+1/2}h^z_j + \sigma_{i+1/2,j-1/2}h^z_{j-1}\big)r_{i-1/2}}{2h^r_i},\\
p4_{i,j} = \frac{\big(\sigma_{i+1/2,j+1/2}h^r_i + \sigma_{i-1/2,j+1/2}h^r_{i-1}\big)r_i}{2h^z_j},
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
p0_{i,j} = p3_{i-1,j} + p4_{i,j-1} + p3_{i,j} + p4_{i,j} + \frac{m^2}{4r_i}\big(&\sigma_{i+1/2,j+1/2}h^r_i h^z_j\\
&+ \sigma_{i-1/2,j+1/2}h^r_{i-1}h^z_j + \sigma_{i+1/2,j-1/2}h^r_i h^z_{j-1} + \sigma_{i-1/2,j-1/2}h^r_{i-1}h^z_{j-1}\big),
\end{aligned}$$

$$f^h_{i,j} = f(r_i, z_j) r_i \big(h^r_i + h^r_{i-1}\big)\big(h^z_j + h^z_{j-1}\big)/4.$$

Если узел (i,j) находится на границе с условием второго или третьего рода, то интегрирование проводится только по подобъемам $V^k_{i,j} \in V_{i,j}$, получаемым делением объема $V_{i,j}$ линиями $r = r_i$, $z = z_j$ на четыре части и находящимся внутри расчетной области. При этом интегралы от потока по граничным отрезкам вычисляются или точно, или с помощью простейших квадратурных формул. Краевые условия первого рода аппроксимируются в околограничных узлах точно с помощью прямой подстановки. В результате учета граничных условий коэффициенты и правые части уравнений модифицируются, после чего приходим к алгебраической системе

$$A^h u^h = f^h, \tag{7}$$

где векторы $u^h = \{u_k,\, k = k(i,j)\}$, $f^h = \{f_k\}$ содержат компоненты, соответствующие только внутренним узлам сетки или узлам, лежащим на границе с условиями второго или третьего рода.

Полученная система является симметричной, положительно определенной, монотонной, т. е. стилтьесовой (см. [5]), и имеет погрешность сеточного решения $O(h)$ в общем случае и $O(h^2)$, если сетка является кусочно-равномерной с конечным числом сеточных зон при $h \to 0$ (см. [3]). Однако сходимость численного решения предполагает ограниченность производных от решения, что вблизи точечного источника или смены типа граничного условия не имеет места. Для обеспечения требуемой точности в окрестности таких особых точек

применяются либо сгущающиеся сетки с величинами сеточных шагов, образующих геометрическую прогрессию, либо аппроксимации специального вида, основанные на знании вида особенности вблизи этих точек.

Рассмотрим подробнее второй подход. Для этого опишем поэлементное получение итоговой системы сеточных уравнений.

Сеточные линии $r = r_i$, $z = z_j$ делят ячейку на четыре части (подобъема), что позволяет представить поток (5) через всю поверхность сеточной ячейки в аддитивной форме:

$$I_{i,j} = \sum_{k=1}^{4} I_{i,j}^k,$$

где $I_{i,j}^k$ — поток через часть поверхности $k-$го подобъема. Обозначим для ячейки $V_{i,j}$ подобъем, находящийся в элементе с вершинами, имеющими локальные номера 0, 3, 4, 8 (см. рис. 1), например, номером 4.

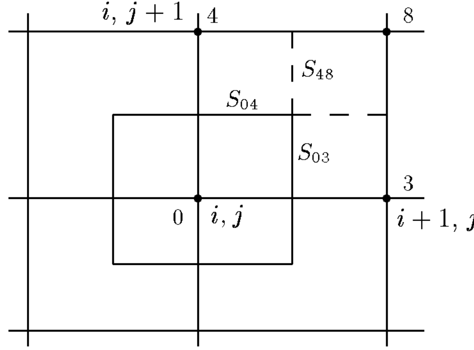


Рис. 1. Конечный объем и локальная нумерация вершин элемента

Соответствующий поток $I_{i,j}^4$ через часть поверхности этого подобъема — участки S_{03} и S_{04} — также имеет аддитивное представление:

$$I_0^4 \equiv I_{i,j}^4 = I_{03} + I_{04},$$

которое после аппроксимации принимает вид линейной комбинации неизвестных значений u_0, u_3, u_4:

$$\begin{gathered} I_0^4 = I_{0,h}^4 + \psi, \\ I_{0,h}^4 = I_{03}^h + I_{04}^h = p00u_0 + p03u_3 + p04u_4, \end{gathered} \tag{8}$$

где ψ — погрешность аппроксимации. При этом аппроксимация потока I_{03}, например, имеет следующий вид:

$$I_{03}^h(u) = \frac{u_0 - u_3}{h_i^r} \frac{h_j^z}{2} \sigma. \tag{9}$$

Аналогично в элементе сетки представляются и потоки I_3^4, I_4^4, I_8^4 в окрестности узлов 3, 4, 8. Тогда если ввести вектор приближенных значений потоков вокруг узлов $\bar{I}_h^4 = \left(I_0^4, I_3^4, I_4^4, I_8^4\right)$ и вектор неизвестных $\bar{u} = (u_0, u_3, u_4, u_8)$, то результат аппроксимации потоков можно записать в матричной форме

$$I_h^4 = P\bar{u}, \quad P = \begin{pmatrix} p00 & p03 & p04 & p08 \\ & p33 & p34 & p38 \\ & & p44 & p48 \\ & & & p88 \end{pmatrix},$$

где матрица P называется локальной матрицей баланса. Эта матрица симметрична, ее диагональные элементы равны сумме внедиагональных, а их значения определяются из формул вида (8), (9):

$$p03 = p48 = \sigma \frac{h_j^z}{2h_i^r}, \quad p04 = p38 = \sigma \frac{h_i^r}{2h_j^z}, \quad p08 = p34 = 0,$$
$$p00 = p03 + p04, \quad p33 = p34 + p38, \quad p44 = p04 + p48, \quad p88 = p38 + p48.$$

Коэффициенты уравнений итоговой системы (7) вычисляются через элементы локальных матриц четырех элементов, имеющих узел (i, j) в качестве своей вершины:

$$\begin{aligned} p0_{i,j} &= p00_{i,j} + p33_{i-1,j} + p44_{i,j-1} + p88_{i-1,j-1}, \\ p3_{i,j} &= p03_{i,j} + p48_{i,j-1}, \quad p4_{i,j} = p04_{i,j} + p38_{i-1,j}, \end{aligned} \tag{10}$$

где нижние индексы элементов локальных матриц являются сеточными индексами нижнего левого узла элемента, в котором определяется соответствующая локальная матрица баланса. Последние формулы и представляют собой поэлементное получение коэффициентов итоговой системы уравнений.

Перейдем теперь к вычислению элементов локальной матрицы баланса с учетом особенности решения. Представляем решение вблизи особой точки в виде

$$u = v + h^\gamma w, \quad \gamma > 0,$$

где v — компонента решения, соответствующая известному виду особенности, w — «гладкая» составляющая решения, а h — характерный шаг сетки.

Компоненты потока через части границы конечного объема S_{03}, S_{04} суть интегралы

$$I_{03}(u) = -\int\limits_{z_j}^{z_{j+1/2}} \sigma \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{i+1/2} dz, \quad I_{04}(u) = -\int\limits_{r_i}^{r_{i+1/2}} \sigma \left(r \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Bigg|_{j+1/2} dr,$$

аппроксимация которых и дает элементы локальной матрицы $p00$, $p03$, $p04$. В случае решения с особенностью вместо аппроксимации $I_{03}^h(u)$ рассматриваем новую аппроксимацию

$$\bar{I}_{03}^h(u) = I_{03}^h(u)\theta_{03}(v), \quad \theta_{03}(v) = \frac{I_{03}(v)}{I_{03}^h(v)}.$$

Здесь $I_{03}^h(v)$ — аналогичная I_{03}^h из (9) аппроксимация интеграла $I_{03}(v)$, которая представима в виде

$$I_{03}^h(v) = p03(v_0 - v_3), \quad v_0 = v(r_i, z_j), \quad v_3 = v(r_{i+1}, z_j).$$

Новая аппроксимация приводит к модификации элементов локальной матрицы, при этом новые коэффициенты $p03$, $p48$, например, имеют вид

$$\overline{p03} = p03\theta_{03}(v) = \frac{I_{03}(v)}{v_0 - v_3}, \quad \overline{p48} = p48\theta_{48}(v) = \frac{I_{48}(v)}{v_4 - v_8}.$$

Аналогичный вид имеют и элементы $\overline{p04}$, $\overline{p38}$, $\overline{p48}$. Коэффициенты итоговой модифицированной глобальной системы вычисляются через новые элементы локальных матриц по аналогичным (10) формулам.

Рассмотрим в качестве примера задачу о точечном источнике, расположенном в начале координат ($r = 0$, $z = 0$). В этом случае при $m = 0$ решение уравнения (3) есть

$$u(r, z) = v(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad w = 0,$$

и тогда участвующие в модификации коэффициентов интегралы имеют вид

$$I_{03}(v) = -\int\limits_{z_j}^{z_{j+1/2}} \frac{r_{i+1/2}^2}{\sqrt{(r_{i+1/2}^2 + z^2)}}\, dz, \quad I_{04}(v) = -\int\limits_{r_i}^{r_{i+1/2}} \frac{z_{j+1/2}^2}{\sqrt{(r^2 + z_{j+1/2}^2)}} r\, dz$$

и вычисляются явно.

При $m = 1$ (точечный диполь), когда

$$v(r, z) = \frac{r}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}, \quad w = 0,$$

ситуация отличается от случая $m = 0$ тем, что участвующие в интегралах потоков производные

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{z^2 - 2r^2}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{3rz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}}$$

меняют знак на прямых $z^2 = 2r^2$ и $r = 0$, $z = 0$ соответственно, что, в свою очередь, не обеспечивает необходимых знаков коэффициентов итоговой системы (требование принадлежности матрицы A^h из (7) классу M-матриц, необходимое для «решателя»). Поэтому модификация коэффициентов $p03$, $p48$ проводится, если только величины $\theta_{03}(v)$, $\theta_{48}(v)$ неотрицательны. Предполагается, что расчетная область находится в квадранте $r > 0$, $z > 0$.

Кроме того, для $m = 1$ исходное уравнение является уравнением типа Гельмгольца с коэффициентом $1/r^2$ при u. Поэтому интегрирование этого члена уравнения по подобъему

$$Q(u) = \int\limits_{r_i}^{r_{i+1/2}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1/2}} \frac{u}{r}\, drdz$$

с последующей аппроксимацией дает вклады в диагональные элементы локальной матрицы, и новые элементы суть сумма прежних и новых добавок:

$$pii := pii + pii_Q.$$

При этом описанной модификации диффузионных коэффициентов соответствует аналогичная модификация добавочных коэффициентов pii_Q. Если

$$Q(u) = Q_h(u) + \psi, \quad Q_h = p00u_0$$

суть добавочный интеграл и его аппроксимация, то модифицированные добавочные вклады в диагональные элементы локальной матрицы имеют вид

$$\overline{pii}_Q = pii_Q \frac{Q(v)}{Q_h(v)} = \frac{1}{v_i} \int\limits_{r_i}^{r_{i+1/2}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1/2}} \frac{drdz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}},$$

где v_i есть значение известной функции v в вершине элемента с локальным номером i.

3.2. Методы решения сеточных уравнений. Для решения алгебраической системы (7) применяем алгоритм IMIF53 (см. [5]) — неявный метод неполной факторизации с ускорением сопряженными градиентами — описываемый формулами

$$r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = B^{-1}u^0,$$
$$u^k = u^{k-1} + \alpha_{k-1}p^{k-1}, \quad \alpha_k = \frac{(B^{-1}r^k, r^k)}{(Ap^k, p^k)},$$
$$r^k = r^{k-1} - \alpha_{k-1}Ap^{k-1},$$
$$p^k = B^{-1}r^k + \beta_k p^{k-1}, \quad \beta_k = \frac{(B^{-1}r^k, r^k)}{(B^{-1}r^{k-1}, r^{k-1})}.$$

Здесь B есть предобусловливающая матрица вида

$$\begin{aligned} B &= (G-L)G^{-1}(G-U), \\ G &= D - L(G^{-1})^{(3)}U - \theta S, \quad 0 \le \theta \le 1, \\ Se &= [LG^{-1}U - L(G^{-1})^{(3)}U]e, \end{aligned} \tag{11}$$

где θ — итерационный параметр, e — вектор из единичных компонент, G и D — трехдиагональные матрицы, $(G^{-1})^{(3)}$ — «трехдиагональная часть» матрицы G^{-1}, а $L = U^t$ нижняя и верхняя треугольные (однодиагональные) матрицы, определяемые из представления исходной матрицы $A = D - L - U$. Теоретическая оценка числа итераций метода (11) есть $O(h^{-1/2})$, а количество арифметических действий на каждой итерации равно $\approx 35N_rN_z$. В практических расчетах итерации продолжаются до выполнения условия $\|r^k\|/\|r^0\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$ — задаваемый критерий останова, $\|r\| = \left(\sum_{i,j} r_{i,j}^2\right)^{1/2}$, или до тех пор, пока не достигается некоторое заданное число итераций $k_{\max}$.

Для повышения эффективности численных алгоритмов применяется трехсеточный метод (один из вариантов метода последовательности вложенных сеток), последовательность действий которого заключается в следующем.

Обозначим через Ω_c^h редкую сетку с характерным шагом h, а через $\Omega_m^h \supset \Omega_c^h$ и $\Omega_f^h \supset \Omega_m^h$ — среднюю и густую вложенные сетки с характерными шагами $h/2$ и $h/4$ соответственно. На рис. 2 символами $\bullet$ отмечены узлы редкой сетки, являющиеся также узлами сеток Ω_m^h и Ω_f^h, а символами $\times$ и $\circ$ — узлы средней сетки, лежащие на серединах ребер или в серединах элементов редкой сетки. Множество узлов последнего типа назовем *сдвинутой редкой сеткой* и обозначим Ω_{mv}^h, а множество реберных узлов из Ω_m^h обозначим через Ω_{me}^h, тогда

$$\Omega_m^h = \Omega_{mc}^h \cup \Omega_{mv}^h \cup \Omega_{me}^h, \quad \Omega_{mc}^h = \Omega_c^h.$$

Введем также в рассмотрение множество узлов редуцированной средней сетки

$$\Omega_{mr}^h = \Omega_{me}^h \cup \Omega_{mv}^h = \Omega_m^h / \Omega_{mc}^h,$$

в которое не входят узлы редкой сетки.

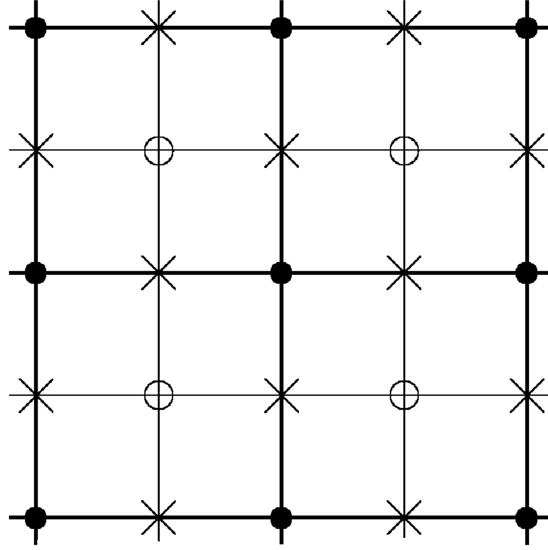


Рис. 2. Узлы редкой и средней сеток

Аналогично, в густой сетке Ω_f^h выделим множество узлов редуцированной густой сетки Ω_{fr}^h, а также множества реберных и внутренних узлов (лежащих в серединах ребер и ячеек средней сетки) Ω_{fe}^h и Ω_{fv}^h так, чтобы выполнялись равенства

$$\Omega_f^h = \Omega_{fm}^h \cup \Omega_{fe}^h U_{fv}^h = \Omega_m^h \cup \Omega_{fr}^h, \quad \Omega_{fm}^h = \Omega_m^h,$$

где Ω_{mc}^h есть множество общих узлов $\Omega_c^h \cup \Omega_m^h$.

Перед началом итерационного трехсеточного метода формируем три системы пятиточечных уравнений вида

$$A_c u_c = f_c, \quad A_m u_m = f_m, \quad A_f u_f = f_f$$

на сетках Ω_c^h, Ω_m^h, Ω_f^h, обозначая соответственно матрицы и векторы через A_c и f_c, A_m и f_m, A_f и f_f. Кроме того, формируем аналогичную вспомогательную систему $A_{mv} u_{mv} = f_{mv}$ для сдвинутой редкой сетки Ω_{mv}^h, получаемую исключением из уравнений $A_m u_m = f_m$ для соответствующих узлов из Ω_m^h неизвестных в реберных узлах Ω_{me}^h. При этом значения u_c в редких узлах считаются известными и переносятся в правую часть.

Получаемая система записывается в следующем виде (индексы i, j относятся к узлам сдвинутой редкой сетки):

$$-a_{i,j}^{mv} u_{i-2,j} - b_{i,j}^{mv} u_{i,j-2} - c_{i,j}^{mv} u_{i+2,j} - d_{i,j}^{mv} u_{i,j+2} + e_{i,j}^{mv} u_{i,j} = f_{i,j}^{mv}, \qquad (12)$$

где новые коэффициенты определяются формулами

$$e^{mv}_{i,j} = e^m_{i,j} - \frac{a^m_{i,j}c^m_{i-1,j}}{e^m_{i-1,j}} - \frac{b^m_{i,j}d^m_{i,j-1}}{e^m_{i,j-1}} - \frac{c^m_{i,j}a^m_{i+1,j}}{e^m_{i+1,j}} - \frac{d^m_{i,j}b^m_{i,j+1}}{e^m_{i,j+1}},$$

$$a^{mv}_{i-2,j} = c^{cc}_{i,j} = \frac{c^m_{i,j}c^m_{i+1,j}}{e^m_{i+1,j}}, \quad b^{cc}_{i,j-2} = d^{cc}_{i,j} = \frac{d^m_{i,j}d^m_{i,j+1}}{e^m_{i,j+1}},$$

$$f^{mv}_{i,j} = f^m_{i,j} + a^m_{i,j}\frac{f^m_{i-1,j}}{e^m_{i,j-1}} + b^m_{i,j}\frac{f^m_{i,j-1}}{e^m_{i,j-1}} + c^m_{i,j}\frac{f^m_{i+1,j}}{e^m_{i+1,j}} + d^m_{i,j}\frac{f^m_{i,j+1}}{e^m_{i,j+1}} \tag{13}$$
$$+ \left(a^m_{i,j}\frac{b^m_{i-1,j}}{e^m_{i-1,j}} + b^m_{i,j}\frac{a^m_{i,j-1}}{e^m_{i,j-1}}\right)u^c_{i-1,j-1} + \left(b^m_{i,j}\frac{c^m_{i,j-1}}{e^m_{i,j-1}} + c^m_{i,j}\frac{b^m_{i+1,j}}{e^m_{i+1,j}}\right)u^c_{i+1,j-1}$$
$$+ \left(c^m_{i,j}\frac{d^m_{i+1,j}}{e^m_{i+1,j}} + d^m_{i,j}\frac{c^m_{i,j+1}}{e^m_{i,j+1}}\right)u^c_{i+1,j+1} + \left(a^m_{i,j}\frac{d^m_{i-1,j}}{e^m_{i-1,j}} + d^m_{i,j}\frac{a^m_{i,j+1}}{e^m_{i,j+1}}\right)u^c_{i-1,j+1}.$$

Далее выполняются следующие стадии вычислительного процесса.

1. Решаем методом IMIF53 с итерационной точностью ε_c систему $A_c u_c = f_c$ на редкой сетке Ω^h_c. Полученные значения записываются в соответствующие узлы из Ω^h_{mc} и обозначаются $u^0_{mc} = u_c$.

2. В узлах из Ω^h_{mv} находим начальное приближение $\bar{u}^0_{mv}$ как среднее арифметическое четырех «диагональных» соседей из Ω_c.

3. В реберных узлах из Ω^h_{me} вычисляем начальное приближение u^0_{me} из уравнений для средней сетки Ω_m:

$$\left(u^0_{me}\right)_{i,j} = \left(f^m_{i,j} + a^m_{i,j}\bar{u}^0_{i-1,j} + b^m_{i,j}\bar{u}^0_{i,j-1} + c^m_{i,j}\bar{u}^0_{i+1,j} + d^m_{i,j}\bar{u}^0_{i,j+1}\right)/e^m_{i,j}. \tag{14}$$

4. Для узлов Ω^h_{mv} находим откорректированное начальное приближение u^0_{mv} из уравнений для средней сетки Ω^h_m по формуле вида (14), но с модифицированными соответствующим образом индексами.

5. На сдвинутой редкой сетке Ω_{mv} решается с помощью IMIF53 система (12) с использованием в качестве начального приближения u^0_{mv} из предыдущего этапа. Получаемое новое приближение обозначаем u^1_{mv}.

6. В реберных узлах Ω_{me} вычисляется новое приближение u^1_{me} из уравнения вида (14) с заменой значений u^0_{mv} на u^1_{mv}.

7. В узлах Ω_{mc} вычисляется невязка по узлам средней сетки и корректируется правая часть для уравнений на редкой сетке:

$$(r^0_m)_{i,j} = (f_m - A_m u^1_m)_{i,j}, \quad (i,j) \in \Omega^h_{mc}, \tag{15}$$
$$f^1_{i,j} = f_{i,j} + (r^0_m)_{i,j}, \quad (i,j) \in \Omega^h_c. \tag{16}$$

8. На редкой сетке Ω_c методом IMIF53 с начальным приближением u_c из п. 1 и с точностью ε^1_c решается уравнение $A_c u^1_c = f^1_c$. Полученные значения «заносятся» в соответствующие узлы из Ω_m и обозначаются через u^1_{mc}.

9. На сетке Ω_c делается модифицированная экстраполяция

$$u^2_{mc} = u^0_{fc} = \left(5u^1_{mc} - u_c\right)/4, \tag{17}$$

представляющая собой вычисление начального приближения сеточного решения u^0_f в узлах редкой сетки.

10. В узлах Ω_{mr} редуцированной средней сетки вычисляется новое приближение $\tilde{u}^1_{mr}$ путем повторения операций из пп. 3, 4, но с новыми, рассчитанными в п. 9 данными.

11. На сдвинутой редкой сетке Ω_m^h повторно решается методом IMIF53 система (12), т. е. повторяется п. 5 с использованием $\tilde{u}_{mr}^1$ в качестве начального приближения; результат обозначаем через u_{mv}^2.

12. В реберных узлах средней сетки Ω_{me} вычисляется новое приближение u_{me}^2 путем повторения п. 6 с новыми данными.

13. Полученное приближение на средней сетке $u_m^2 = \left(u_{mc}^2, u_{me}^2, u_{mv}^2\right)$ засылается в соответствующие узлы густой сетки Ω_{mf} и принимается за первое приближение u_{fm}^1.

14. Далее, по аналогии с предыдущим вычисляются последовательно нулевые и первые приближения u_{fv}^0, u_{fe}^0, u_{fv}^1, u_{fe}^1 в реберных и внутренних узлах густой сетки, т. е. выполняются пп. 2–6, но на другой паре сеток.

15. Затем на густой сетке Ω_f методом IMIF53 с итерационной точностью ε_f делаются «контрольные» итерации для уточнения значений $u_f^2 = (u_{fc}^2, u_{fe}^2, u_{fv}^2)$, которые берутся в качестве начальных приближений.

Отметим также, что на всех этапах, кроме первого, с применением итерационного метода IMIF53 допускается проведением заданного числа итераций $k_{\max} \approx 5$, поскольку в данных случаях используются хорошие начальные приближения.

4. Численные эксперименты

С целью иллюстрации эффективности предложенных алгоритмов мы приведем результаты трех серий расчетов. Первая серия для задачи Дирихле с граничным условием, соответствующим полю точечного источника, демонстрирует сходимость сеточного решения на сгущающихся вложенных сетках при учете и без учета особенности точного решения. Другая серия расчетов демонстрирует особенности метода Фурье (2)–(4) при сведении трехмерной краевой задачи к серии двумерных. И, наконец, приводятся сравнительные данные по экономичности вычислений с использованием трехсеточного метода из п. 3.2. Расчеты проводились с помощью программы, аналогичной описанной в [4].

Первая модельная задача решалась для уравнений вида (3) при $m = 0, 1$ (нулевая и первая гармоники) в квадратной области $a < r$, $z < 1$ с краевыми условиями 1-го рода, соответствующими точным решениям

$$u_0(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad u_1(r, z) = \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В табл. 1 приведены значения максимальных погрешностей

$$\delta = \max_{i,j}\{|v_{i,j} - u(r_i, z_j)|\}$$

численных решений для нулевой и первой гармоник при различных значениях $a = 0{,}025, 0{,}05, 0{,}1$ соответствующих разным степеням гладкости искомых функций. Расчеты проводились на трех квадратных сетках с последовательно уменьшающимися вдвое шагами $h = 0{,}0125$, $0{,}00625$, $0{,}003125$ (для $a = 0,05$, например, соответствующие количества шагов сеток равны 76×76, 152×152, 304×304). В каждой клетке таблицы верхнее число означает ошибку сеточного решения без выделения сингулярности, а нижнее — с учетом описанной в п. 3.1 модификации сеточных коэффициентов. Знак ε означает, что соответствующая ошибка примерно равна точности итерационного решения, которая задавалась равной $\varepsilon = 10^{-9}$ (т. е. погрешность сеточной аппроксимации фактически равна нулю).

Т а б л и ц а 1

Ошибки сеточных решений u_0, u_1 без учета и с учетом особенностей

h	$m=0$			$m=1$		
	$a=0,025$	$a=0,05$	$a=0,1$	$a=0,025$	$a=0,05$	$a=0,1$
$1,25\cdot10^{-2}$	$3,48\cdot10^{-2}$ ε	$4,57\cdot10^{-3}$ ε	$5,80\cdot10^{-4}$ ε	$1,50$ $2,19\cdot10^{-1}$	$1,13\cdot10^{-1}$ $3,73\cdot10^{-2}$	$7,34\cdot10^{-3}$ $2,38\cdot10^{-3}$
$6,25\cdot10^{-3}$	$9,15\cdot10^{-3}$ ε	$1,16\cdot10^{-3}$ ε	$1,46\cdot10^{-4}$ ε	$4,52\cdot10^{-1}$ $1,49\cdot10^{-1}$	$2,94\cdot10^{-2}$ $9,50\cdot10^{-3}$	$1,86\cdot10^{-3}$ $1,58\cdot10^{-3}$
$3,125\cdot10^{-3}$	$2,32\cdot10^{-3}$ ε	$2,93\cdot10^{-4}$ ε	$3,66\cdot10^{-5}$ ε	$1,17\cdot10^{-1}$ $3,80\cdot10^{-2}$	$7,46\cdot10^{-3}$ $6,34\cdot10^{-3}$	$4,67\cdot10^{-4}$ $4,56\cdot10^{-4}$

Как видно из результатов, «стандартная» немодифицированная схема имеет второй порядок точности, причем погрешность сеточного решения существенно увеличивается как с уменьшением a, так и с увеличением m, что объясняется сопутствующим ростом производных. Введение учета сингулярности в данных модельных задачах кардинально меняет ситуацию: при $m = 0$ сеточное решение равно точному на любой(!) сетке.

Что касается первой гармоники ($m = 1$), то здесь модификация тоже дает улучшение, но существенно меньше, так как в этом случае учет сингулярности не делается в окрестности «особого» луча $z = \sqrt{2}\,r$.

Для второй серии численных экспериментов была выбрана модельная задача о потенциале, создаваемом двухточечным диполем в бесконечной однородной и изотропной среде. Искомый потенциал находится из уравнения (1) с правой частью вида

$$f(\bar{r}) = J(\delta(r-a) - \delta(r+a)), \tag{18}$$

где σ — постоянная, $\delta(r)$ — трехмерная дельта-функции. Считаем, что u удовлетворяет условию излучения и $u(0) = 0$.

В цилиндрических координатах правая часть принимает вид

$$f(r,z,\varphi) = \frac{J}{a}(\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi)) \times \delta(z)\delta(r-a). \tag{19}$$

(Под дельта-функцией угла φ в правой части будем понимать соответствующий функционал на пространстве 2π-периодических функций.) Разложим потенциал u в ряд Фурье. Из соображений симметрии видно, что $u(r,z,\varphi) = u(r,z,-\varphi) = -u(r,z,\varphi+\pi)$. Поэтому в ряде (2) присутствуют только нечетные гармоники, причем $u_m = u_{-m}$. Пользуясь представлением

$$\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\cos((2m-1)\varphi),$$

получим

$$f_m(r,z) = \frac{J}{\pi a}\delta(z)\delta(r-a) \tag{20}$$

(для всех нечетных m). Угловые гармоники потенциала u_m в области $r > 0$ удовлетворяют уравнению (3), которое должно быть дополнено условием излучения и граничным условием $u_m(0,z) = 0$.

Из симметрии задачи следует, что $u(z) = u(-z)$ (при тех же r и φ). Поэтому достаточно рассмотреть лишь область $z > 0$, установив на границе $z = 0$ однородное условие Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

При решении задачи расчетная область выбиралась в форме прямоугольника $0 < r < L$, $0 < z < L$, на его нижней границе $z = 0$ задавалось однородное условие Неймана $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, за исключением короткого отрезка длины l вблизи точки $r = a$, $z = 0$, где для $a < r < a + l$ было задано неоднородное условие Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{J}{\pi \sigma a l}.$$

Этот отрезок моделирует источник тока силы J или, точнее, дельта-функцию в правой части (19). На трех других сторонах вводились однородные условия Дирихле: на стороне $r = 0$ — по условию задачи, на двух оставшихся сторонах — вместо условия излучения. Получаемая краевая задача эквивалентна исходной в пределе $L \to \infty$: при достаточно малых l в области $z \gg l$ ее решение будет мало отличаться от решения исходной задачи.

В табл. 2 приведены результаты экспериментов по расчету первой, третьей и пятой гармоник для $J = 4\pi$, $a = 1$, $\sigma = 1$. Размер расчетной области равен $L = 100$ при $l = 10^{-2}$. Использовалась прямоугольная кусочно-неравномерная сетка в координатах r, z с законом сгущения типа геометрической прогрессии, описываемая в [4]. Сетка имела вдоль оси r три зоны с границами $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1,01$, $r_3 = 100$, числом шагов 30, 5, 150 и множителями прогрессии 0,86, 1 и 1,055 соответственно. По оси z сетка состояла из пяти зон с 30, 90, 45, 50, 30 шагами, множителями 1,1, 1, 1,03, 1, 1,14 и границами зон $z_0 = 0$, $z_1 = 0,5$, $z_2 = 5$, $z_3 = 10$, $z_4 = 20$, $z_5 = 100$ соответственно. Общее число узлов сетки равно 186×246, а использованная итерационная точность $\varepsilon = 10^{-9}$.

Т а б л и ц а 2

Погрешности решения для поля дипольного источника

z	1	2	3	4	5	10
u^*	$5,528 \cdot 10^{-1}$	$1,464 \cdot 10^{-1}$	$5,598 \cdot 10^{-2}$	$2,639 \cdot 10^{-2}$	$1,430 \cdot 10^{-2}$	$1,942 \cdot 10^{-3}$
u_1	$5,021 \cdot 10^{-1}$	$1,443 \cdot 10^{-1}$	$5,592 \cdot 10^{-2}$	$2,646 \cdot 10^{-2}$	$1,436 \cdot 10^{-2}$	$1,951 \cdot 10^{-3}$
u	$5,544 \cdot 10^{-1}$	$1,470 \cdot 10^{-1}$	$5,622 \cdot 10^{-2}$	$2,651 \cdot 10^{-2}$	$1,437 \cdot 10^{-2}$	$1,951 \cdot 10^{-3}$
$u - u^*$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-6}$

Значения потенциала вычислялись на прямой $r = a$, $\varphi = 0$. Здесь $u^* = \dfrac{J}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\sqrt{z^2 + 4a^2}}\right)$ — точное решение, $u = u_1 + u_3 + u_5$ — приближенное решение, u_1 — вклад в приближенное решение от первой гармоники.

Анализ данных результатов показывает достаточно хорошую точность для всех приведенных z. Видно также, что с ростом z точность существенно увеличивается, а вклад высших гармоник в решение уменьшается. Отметим, что вклад пятой гармоники проявляется только при $z = 1$ и лишь в четвертой значащей цифре.

Третья серия экспериментов была проведена с целью демонстрации эффективности трехсеточного метода. В табл. 3 приведены полученные погрешности приближений δ на разных этапах расчетов. При этом на редкой сетке задавалась точность $\varepsilon_c = 10^{-9}$ (что потребовало 26 итераций), а на остальных этапах

проводилось заданное число итераций $k_{\max} = 5$. Решалась модельная задача Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате $0,1 < r,\ z < 1,1$ с граничными условиями для потенциала точечного источника, расположенного в начале координат. Количества шагов равномерных сеток равнялись 128×128, 256×256 и 512×512.

Таблица 3

Погрешности этапов трехсеточного метода

Номер этапа	1	8	12	14	15
δ	$2,28 \cdot 10^{-4}$	$5,71 \cdot 10^{-5}$	$1,64 \cdot 10^{-5}$	$1,61 \cdot 10^{-5}$	$1,59 \cdot 10^{-5}$

Приведенные численные результаты соответствуют теоретическим оценкам, и полученная погрешность на густой сетке примерно в 16 раз меньше, чем на редкой. Отметим, что при непосредственном решении данной задачи на густой сетке число итераций при $\varepsilon = 10^{-9}$ равно $k = 50$, т. е. с учетом трудоемкости промежуточных этапов коэффициент ускорения трехсеточного алгоритма равен примерно 8. Отметим, что предельно достижимое значение коэффициента ускорения при $h \to 0$ равно 32.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дашевский Ю. А., Полозов С. В., Эпов М. И.,* Мартынов А. А., Суродина И. В. Разработка зондов постоянного тока с неосимметричным возбуждением для исследования изотропных и анизотропных разрезов // Электрические и электромагнитные методы исследования в нефтегазовых скважинах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 130–144.
2. *Tabarovsky L. A., Goldman M. M., Rabinovich M. B., Strack K. M.* 2.5-D modeling in electromagnetic methods of geophysics // J. Appl. Geophysics. 1996. V. 35. P. 261–284.
3. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
4. *Gurieva Y. L., Il'in V. P.* Finite volume approaches for 2-D BVPs: algorithms, data structures, software and experiments / Report № 9715. Univ. of Nijemegen, 1997. The Netherlands.
5. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995.

г. Новосибирск
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН
e-mail: ilin@comcen.nsk.su

Статья поступила 26 января 2001 г.